Beschikbare tijd: 100 minuten

Instructies voor het invullen van het antwoordblad.

1. Dit open boek tentamen bestaat uit **10** opgaven.

2. U mag tijdens het tentamen gebruik maken van:
   - Een tabellenboek, zonder aantekeningen;

   Toegestane boeken:

   - een wiskundeboek naar keuze

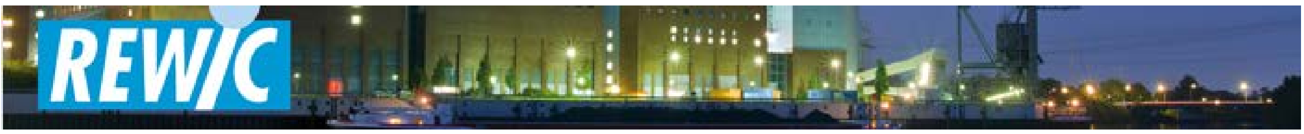
   - Rekenmachine

3. Het aantal te behalen punten.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	5	5	5	10	5	5	15	15	20

$$Cijfer = \frac{Aantal\ \ punten}{9} + 1$$

Veel succes!



Vraag 1: Differentieer $f(x) = x^3 \cdot (x^2 + \frac{1}{x})$

Vraag 2: Differentieer $f(x) = a \cdot x^b + \frac{c}{x^d}$

Vraag 3: Differentieer $f(x) = (\cos(1+x))^5$

Vraag 4: Bepaal de primitieve van $f(x) = x^2 + 5 \cdot x^5$

Vraag 5: Bepaal de primitieve van $f(x) = x \cdot \sin(x^2)$

Vraag 6: Bereken de volgende integraal $\int_2^5 (x^2 - 3 \cdot x + 5) dx$

Vraag 7: Bepaal de primitieve van $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$

Vraag 8: Een fietsband verliest elke week 3,5% van zijn spanning. Als er nog 70% van de oorspronkelijke spanning aanwezig is moet de band opnieuw opgepompt worden. Bereken het aantal weken tussen twee oppompbeurten. Geef het antwoord met minimaal 1 cijfer achter de komma nauwkeurig.

Vraag 9: Gegeven is een gesloten blik, met diameter D en hoogte h. De inhoud bedraagt juist 1 liter.

Bepaal de diameter en de hoogte zo, dat het benodigde plaatmateriaal om het blik te vervaardigen, minimaal is.

Vraag 10 In een cilinder wordt een hoeveelheid lucht gecomprimeerd volgens de wet van Poisson.

Deze zegt $p_1 \cdot V^n{}_1 = p_2 \cdot V^n{}_2$

De volgende gegevens zijn bekend

Beginvolume	=	2	m^3
Eindvolume	=	0,5	m^3
Begindruk	=	1	bar
Einddruk	=	5	bar

a. Schets dit proces in een p – V - diagram
b. Bereken de waarde van n
c. Bereken de benodigde compressiearbeid.

UITWERKINGEN

Vraag 1 Differentieer $f(x) = x^3 \cdot (x^2 + \frac{1}{x})$

Manier 1

Op deze eerste manier wordt weliswaar goed, maar niet slim gehandeld. De gegeven functie bestaat uit een product van een tweetal relatief eenvoudige functies. Hierop wordt de productregel toegepast.

$$\frac{d\ f(x)}{dx} = \frac{d\left\{x^3 \cdot (x^2 + \frac{1}{x})\right\}}{dx} = \frac{d}{dx}\, x^3 \cdot (x^2 + \frac{1}{x}) + x^3 \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + \frac{1}{x})$$

$$\frac{d\ f(x)}{dx} = 3 \cdot x^2 \cdot (x^2 + \frac{1}{x}) + x^3 \cdot \left(2 \cdot x - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$\frac{d\ f(x)}{dx} = 3 \cdot x^4 + 3 \cdot x + 2 \cdot x^4 - x$$

$$\frac{d\ f(x)}{dx} = 5 \cdot x^4 + 2 \cdot x$$

Manier 2

Als wat langer naar de gegeven vorm gekeken wordt, dan kan tijdwinst behaald worden door deze eerst uit te vermenigvuldigen. Er volgt dan:

$$\frac{d\ f(x)}{dx} = \frac{d\left\{x^3 \cdot (x^2 + \frac{1}{x})\right\}}{dx} = \frac{d\left\{x^5 + x^2\right\}}{dx} = 5 \cdot x^4 + 2 \cdot x$$

Veel commentaar zal hierna niet nodig zijn!

Vraag 2: Differentieer $f(x) = a \cdot x^b + \frac{c}{x^d}$

$$\frac{d\ f(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{a \cdot x^b + \frac{c}{x^d}\right\} = a \cdot b \cdot x^{b-1} - c \cdot d \cdot x^{-d-1} = a \cdot b \cdot x^{b-1} - \frac{c \cdot d}{x^{d+1}}$$

Vraag 3: Differentieer $f(x) = (\cos(1+x))^5$

$$\frac{d\ f(x)}{dx} = \frac{d(\cos(1+x))^5}{d\cos(1+x)} \cdot \frac{d\cos(1+x)}{d(1+x)} \cdot \frac{d(1+x)}{dx}$$

$$\frac{d\ f(x)}{dx} = 5 \cdot (\cos(1+x))^4 \cdot -\sin(1+x) \cdot 1$$

$$\frac{d\ f(x)}{dx} = -5 \cdot \sin(1+x) \cdot (\cos(1+x))^4$$

Vraag 4: Bepaal de primitieve van $f(x) = x^2 + 5 \cdot x^5$

$$\int f(x)dx = \int \left(x^2 + 5 \cdot x^5\right) dx = \int \left(x^2\right) dx + \int \left(5 \cdot x^5\right) dx = \frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{5}{6} \cdot x^6 + C$$

Vraag 5: Bepaal de primitieve van $f(x) = x \cdot \sin(x^2)$

$$\int f(x)\ dx = \int x \cdot \sin(x^2)\ dx$$

Beschouw nu eerst apart

$$\frac{d\ x^2}{dx} = 2 \cdot x$$

Hieruit vinden we dat geschreven kan worden

$$dx = \frac{d\ x^2}{2 \cdot x}$$

Deze vorm wordt ingevuld in de oorspronkelijke opgave. We zien:

$$\int f(x)\ dx = \int x \cdot \sin(x^2)\ dx = \int x \cdot \sin(x^2)\ \frac{d\ x^2}{2 \cdot x}$$

$$\int f(x)\ dx = \frac{1}{2} \cdot \int \sin(x^2)\ d\ x^2 = -\frac{1}{2} \cdot \cos(x^2) + C$$

Vraag 6: Bereken de volgende integraal $\int_2^5 (x^2 - 3 \cdot x + 5)dx$

$$\int_2^5 (x^2 - 3 \cdot x + 5)dx = \left[\frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{3}{2} \cdot x^2 + 5 \cdot x\right]_2^5 =$$

$$\left[\left\{\frac{1}{3} \cdot 5^3 - \frac{3}{2} \cdot 5^2 + 5 \cdot 5\right\} - \left\{\frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{3}{2} \cdot 2^2 + 5 \cdot 2\right\}\right] = \frac{45}{2}$$

Vraag 7: Bepaal de primitieve van $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$

$$\int f(x)dx = \int \frac{x-1}{x^2} dx = \int \frac{x}{x^2} dx - \int \frac{1}{x^2} dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x^2} dx = \ln x + \frac{1}{x} + C$$

Vraag 8: Een fietsband verliest elke week 3,5% van zijn spanning. Als er nog 70% van de oorspronkelijke spanning aanwezig is moet de band opnieuw opgepompt worden.
Bereken het aantal weken tussen twee oppompbeurten.

De “groeifactor” van de druk in de fietsband bedraagt 1 - 0,035 = 0,965. Merk hierbij op dat de term “groeifactor” een wat vreemde betekenis heeft. Desondanks wordt voor deze toepassing toch deze term gebruikt.

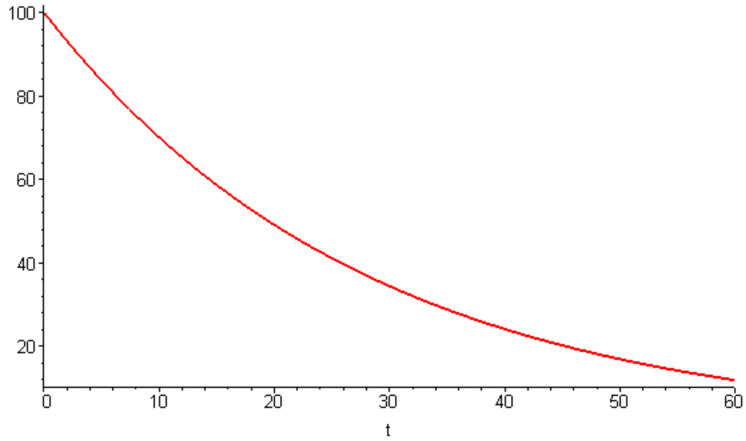
Voor de druk, op tijdstip t, met t in weken, laten we nu gelden: $p(t) = p(0) \cdot 0{,}965^t$

Wanneer de band nog een spanning heeft van 70%, geldt: $0{,}7 = 0{,}965^t$

Dit is het geval voor $\ln 0{,}7 = t \cdot \ln 0{,}965$

Dus voor $t = \dfrac{\ln 0{,}7}{0{,}965} = 10{,}01$

De band moet dus na tien weken weer opnieuw op spanning worden gebracht!



Het verloop van de spanning in de band als functie van de tijd, t, in weken.

Vraag 9: Gegeven is een gesloten blik, met diameter D en hoogte h. De inhoud bedraagt juist 1 liter.

Bepaal de diameter en de hoogte zo, dat het benodigde plaatmateriaal om het blik te vervaardigen, minimaal is.

Voor de inhoud geldt:

$$V = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot D^2 \cdot h = 1$$

Dat betekent dat nu voor de hoogte geschreven kan worden:

$$\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot D^2 \cdot h = 1$$

$$h = \frac{1}{\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot D^2} = \frac{4}{\pi \cdot D^2}$$

Voor de oppervlakte, van het (gesloten) blik geldt nu

$A(D) = \pi \cdot D \cdot h + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot D^2$ en met $h = \frac{4}{\pi \cdot D^2}$ geldt

$$A(D) = \pi \cdot D \cdot \frac{4}{\pi \cdot D^2} + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot D^2$$

Vereenvoudigen geeft $A(D) = \frac{4}{D} + \frac{2}{4} \cdot \pi \cdot D^2$

Vervolgens wordt de afgeleide bepaald, nul gesteld en verder uitgewerkt. We vinden:

$$\frac{d\ A(D)}{d\ D} = -\frac{4}{D^2} + \pi \cdot D = 0$$

$$\frac{4}{D^2} = \pi \cdot D$$

Tenslotte vinden we $D = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} = 1{,}083\ dm$

De hoogte van het blik bedraagt dan $h = \frac{4}{\pi \cdot D^2} = \frac{4}{\pi \cdot 1{,}083^2} = 1{,}085\ dm$

De zojuist gevonden antwoorden kunnen nu gemakkelijk worden gecontroleerd! Invullen in de formule voor de inhoud. Het antwoord is immers bekend!

Vraag 10:
In een cilinder wordt een hoeveelheid lucht gecomprimeerd volgens de wet van Poisson. Deze zegt

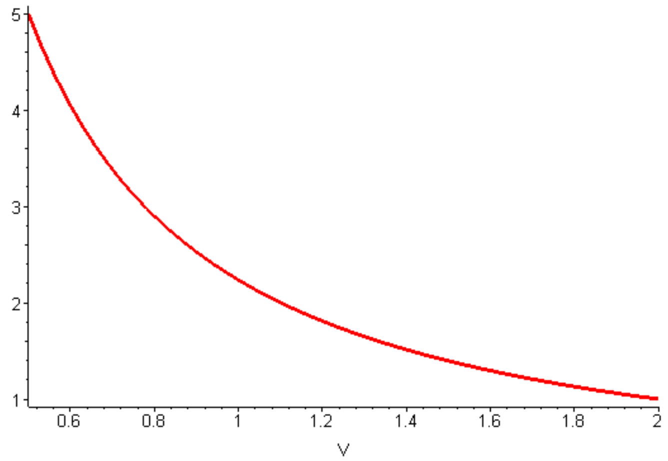
$$p_1 \cdot V^n{}_1 = p_2 \cdot V^n{}_2$$

De volgende gegevens zijn bekend

Beginvolume	=	2	m^3
Eindvolume	=	0,5	m^3
Begindruk	=	1	bar
Einddruk	=	5	bar

a. Schets dit proces in een p – V - diagram
b. Bereken de waarde van n
c. Bereken de benodigde compressiearbeid.

a.



Schematische weergave van het compressieproces

b.

Er geldt

$p_1 \cdot V^n{}_1 = p_2 \cdot V^n{}_2$

$1 \cdot 2^n = 5 \cdot 0{,}5^n$

Herschikken levert

$\frac{1}{5} = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

Links en rechts de logaritme nemen levert $\ln\left(\frac{1}{5}\right) = n \cdot \ln\left(\frac{1}{4}\right)$,waarna $n = \frac{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}{\ln\left(\frac{1}{4}\right)} = 1{,}161$

c.

De benodigde compressiearbeid is de oppervlakte onder de compressielijn en als geschetst onder a.

Omdat geldt $p_1 \cdot V^n{}_1 = p_2 \cdot V^n{}_2$ kan nu gemakkelijk gevonden worden

$p \cdot V^{1{,}161} = 5 \cdot 10^2 \cdot 0{,}5^{1{,}161}$

$p = 500 \cdot \left(\frac{0{,}5}{V}\right)^{1{,}161} [kPa]$!!!!

De gevraagde hoeveelheid arbeid wordt berekend uit

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\, dV = 500 \cdot 0{,}5^{1{,}161} \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V^{1{,}161}} dV = 500 \cdot 0{,}5^{1{,}161} \int_{V_1}^{V_2} V^{-1{,}161} dV = 500 \cdot 0{,}5^{1{,}161} \cdot \left[\frac{1}{-1{,}161+1} \cdot V^{-1{,}161+1}\right]_2^{0{,}5}$$

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\ dV = 500 \cdot 0{,}5^{1{,}161} \cdot \left[\frac{1}{-1{,}161+1} \cdot V^{-1{,}161+1} \right]_2^{0{,}5} = 500 \cdot 0{,}5^{1{,}161} \cdot \frac{1}{-1{,}161+1} \left[\left\{ V^{-1{,}161+1} \right\} - \left\{ V^{-1{,}161+1} \right\} \right]_2^{0{,}5}$$

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\ dV = 500 \cdot 0{,}5^{1{,}161} \cdot \frac{1}{-0{,}161} \left[\left\{ 0{,}5^{-0{,}161} \right\} - \left\{ 2^{-0{,}161} \right\} \right] = -1388{,}8 \cdot \left\{ 1{,}11806 - 0{,}8944 \right\} = -310{,}6\ kJ$$

Merk op dat het antwoord negatief is. Dit is in overeenstemming met de wetten van de natuur; bij compressie moet immers energie (arbeid) toegevoerd worden!