

**Beschikbare tijd:** 100 minuten

Instructies voor het invullen van het antwoordblad.

1. Dit open boek tentamen bestaat uit **4** opgaven.
2. U mag tijdens het tentamen gebruik maken van:
  - Een tabellenboek, zonder aantekeningen;

Toegestane boeken:

- Warmteleer voor Technici; ir. A.J.M. van Kimmenaede
- Toegepaste Thermodynamica; G. van der Linden en P. van Loon
- Stoomtechniek REWIC - A
  
- Rekenmachine
- Stoomtabel
- h - s – diagram (Mollier – diagram)

3. Het aantal te behalen punten.

1	2	3	4
20	25	25	20

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{aantal behaalde punten}}{10} + 1$$

**Veel succes!**



**Vraag 1:**

Een kilogram lucht, die binnen het geheel van dit vraagstuk mag worden beschouwd als ware het een ideaal gas, heeft een temperatuur van 207 °C. Deze lucht laat men achtereenvolgens

- bij constante druk uitzetten tot het volume is verdubbeld
- vervolgens adiabatisch expanderen totdat de temperatuur gedaald is tot 127 °C
- daarna bij constante druk afkoelen totdat de temperatuur -73 °C is geworden
- en tenslotte door adiabatische compressie in temperatuur stijgen totdat opnieuw de temperatuur van 207 °C is bereikt

Alle toestandswijzigingen verlopen omkeerbaar.

Welke verhouding bestaat er tussen de hoeveelheid arbeid die bij dit gehele proces wordt geleverd en de hoeveelheid warmte die bij de eerst genoemde toestandswijziging moet worden toegevoerd?

**Additionele gegevens:**

$$c_p = 1000 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K}); \quad c_v = 713 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K}); \quad R_s = 287 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K}) \text{ en } k = 1,4$$

**Vraag 2:**

Een compressor werkt volgens de wet van Poisson,  $p \cdot V^n = c$ .

De machine zuigt lucht aan met een druk van 0,95 bar en de persdruk bedraagt 5 bar. De machine heeft geen schadelijke ruimte. Voor de waarde van de exponent van Poisson nemen we 1,38.

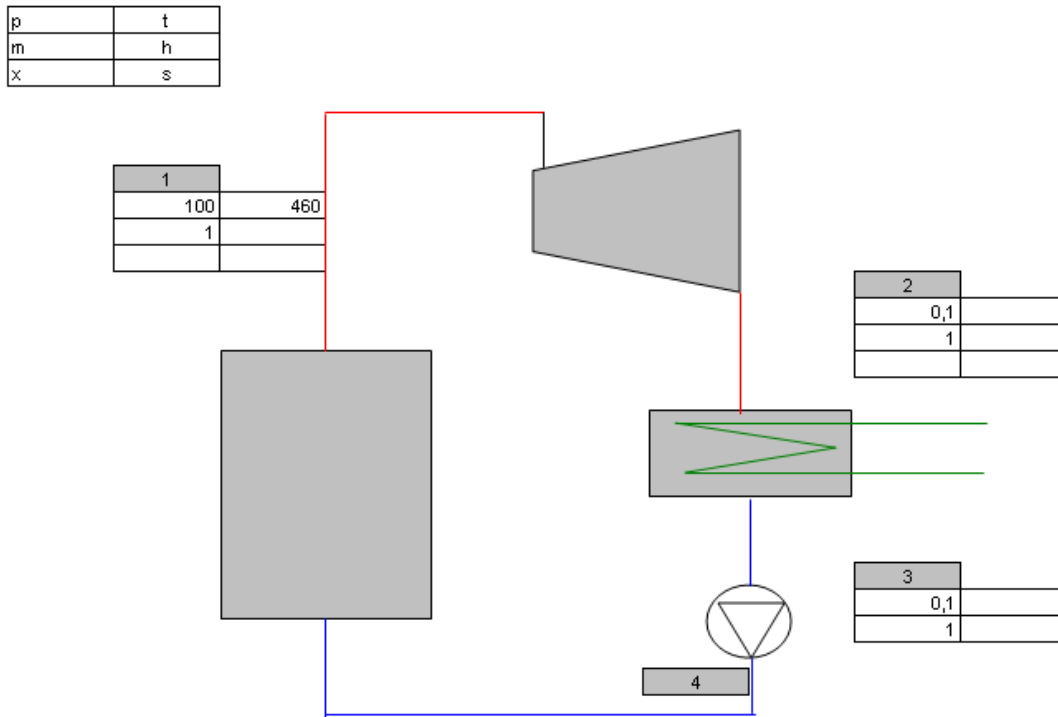
De compressor heeft slechts één cilinder en draait met een toerental van 5 omwentelingen per seconde.

Het slagvolume van de compressor bedraagt 5 liter.

Bereken het opgenomen vermogen van de compressor, aangenomen dat alle rendementen 100% zijn.

### Vraag 3:

In een stoomturbine-installatie doorloopt het water – stoom mengsel een kringloop als weergegeven op onderstaande afbeelding.



#### Weergave van het Rankine proces

In de ketel wordt water verwarmd, verdampt en vervolgens op een temperatuur van 460 °C gebracht in een oververhitter. De druk is hierbij constant 100 bar. Er hoeft dus geen rekening te worden gehouden met optredende drukverliezen.

In de stoomturbine expandeert de stoom isentroop tot een druk van 0,1 bar. Ook eventueel optredende drukverliezen in de condensor blijven buiten beschouwing. De condensor werkt regeneratief. De invloed van de arbeid van de condensaat / voedingwater pomp mag niet worden verwaarloosd. Wel mag een verliesvrije pomp worden verondersteld.

Gevraagd:

- Schets het verloop in het T – s – diagram
- Teken het expansieproces in het h – s – diagram
- Bepaal met hulp van het h – s – diagram en de stoomtabellen de waarden van p, T, h, s en x in de punten 1 tot en met 4
- Bereken de specifieke arbeid welke de stoomturbine levert
- Bereken de door de ketel geleverde specifieke toegevoerde warmte
- Bereken het thermisch rendement van de installatie
- Bereken de gemiddelde temperatuur van warmtetoevoer aan de installatie als mede de gemiddelde temperatuur van warmte afvoer. Bereken met hulp van deze beide waarden opnieuw het thermisch rendement. Controleer de gevonden waarde met de onder (f) gevonden waarde
- Verklaar welke de consequenties zijn indien men de temperatuur zou opvoeren tot 560 °C. Neem hierin niet alleen het effect op het rendement mee, maar ga ook in op levensduur van materialen en installatieonderdelen.

**Vraag 4:**

Aan een gas, met een druk van 6 bar en een temperatuur van 320 K wordt bij **constante druk** 5 MJ aan warmte toegevoerd. Bereken de verandering van de entropie, uitgedrukt in kJ/(kg.K), indien nog gegeven is dat het beginvolume 2,5 m<sup>3</sup> bedraagt. Neem voor de k – waarde, k = 1,4.

# UITWERKINGEN:

## Vraag 1:

Allereerst wordt het proces schematisch weergegeven in een  $p - V -$  diagram, ook wel Andrews diagram genoemd. Zie hiertoe bijgaande afbeelding.

Bedenk dat alle temperaturen naar Kelvin moeten worden getransformeerd alvorens berekeningen met hulp van de ideaal gaswetten kunnen worden gemaakt.

### a. De eerste wijziging verloopt volgens een isobaar.

We laten gelden  $\frac{p \cdot V}{T} = \text{con}$  en met  $p = \text{constant}$  geldt ook  $\frac{p \cdot V}{T} = \text{con}$  zodat  $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$  en omdat

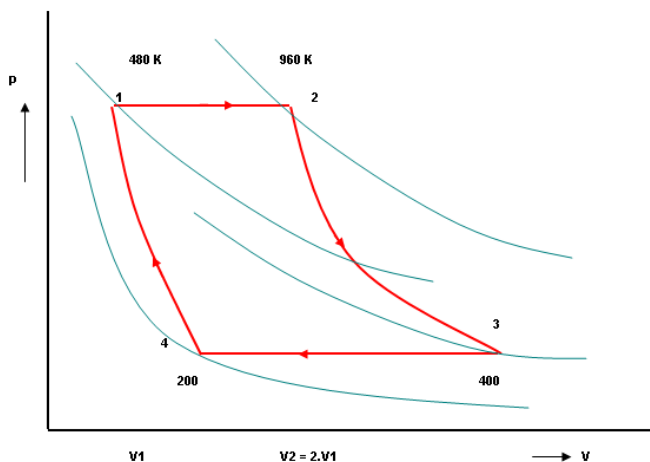
$$V_2 = 2 \cdot V_1,$$

geldt ook

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{2 \cdot V_1}{T_2} \text{ en hieruit } \frac{1}{T_1} = \frac{2}{T_2}$$

Hieruit is eenvoudig in te zien dat geldt

$$T_2 = 2 \cdot T_1 = 2 \cdot 480 = 960 \text{ K}$$



*Kringproces, weergegeven in het Andrews – diagram*

De toegevoerde warmte, van punt 1 naar punt 2, wordt berekend uit:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = m \cdot c_p \cdot (T_2 - T_1)$$

$$Q_{1 \rightarrow 2} = 1 \cdot 1 \cdot (960 - 480) = 480 \text{ kJ / kg}$$

### b. De tweede verandering verloopt volgens een adiabaat

Tijdens deze expansie verricht het gas arbeid. Deze arbeid wordt berekend uit

$$W_{2 \rightarrow 3} = \frac{-m \cdot R_s}{(k-1)} \cdot \{T_3 - T_2\}$$

$$W_{2 \rightarrow 3} = \frac{-1 \cdot 0,287}{(1,4 - 1)} \cdot \{400 - 960\} = 401,8 \text{ kJ / kg}$$

**c. De derde verandering verloopt opnieuw volgens een isobaar**

Vanaf punt 3 tot punt 4 wordt onder gelijkblijvende druk warmte naar de omgeving afgevoerd. Deze hoeveelheid warmte kan worden berekend uit:

$$Q_{3 \rightarrow 4} = m \cdot c_p \cdot (T_4 - T_3)$$

$$Q_{3 \rightarrow 4} = 1 \cdot 1 \cdot (400 - 200) = -200 \text{ kJ / kg}$$

Merk op dat de gevonden waarde negatief is. Dit geeft aan dat het hier warmte betreft welke wordt afgevoerd naar de omgeving.

**d. De vierde en laatste toestandsverandering verloopt weer volgens een adiabaat**

De benodigde compressiearbeid kan worden berekend uit

$$W_{2 \rightarrow 3} = \frac{-m \cdot R_s}{(k - 1)} \cdot \{T_1 - T_4\}$$

$$W_{2 \rightarrow 3} = \frac{-1 \cdot 0,287}{(1,4 - 1)} \cdot \{480 - 200\} = -201 \text{ kJ / kg}$$

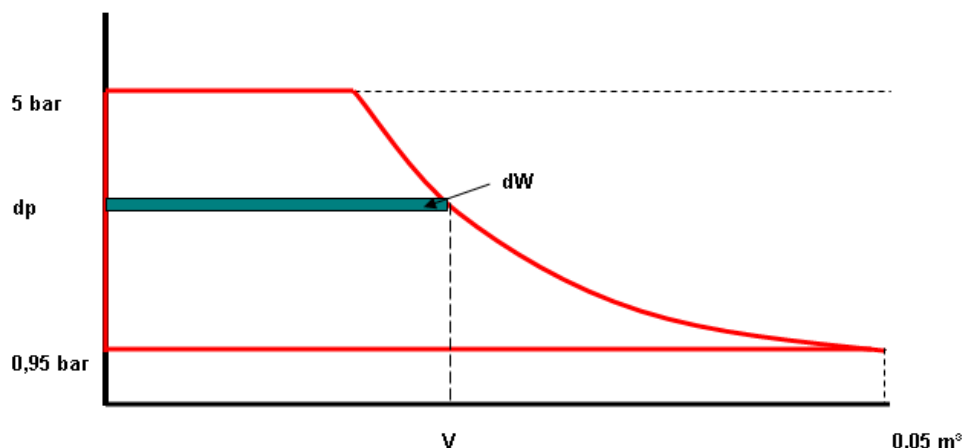
Merk op dat de gevonden waarde negatief is. Dit geeft aan dat het hier arbeid betreft welke wordt toegevoerd aan de kringloop.

De gevraagde verhouding, die ook wel het rendement wordt genoemd, berekent men als volgt:

$$\eta = \frac{\Sigma W}{Q_{1 \rightarrow 2}}, \text{ zodat } \eta = \frac{401 - 201}{480} = \frac{200}{480} = 0,41666$$

**Vraag 2:**

Beschouw onderstaande afbeelding 1, waarop het kringproces in beeld gebracht is.



Weergave van het (links om draaiende) kringproces in de cilinder van een compressor. Het op bovenstaande afbeelding, met blauw aangegeven oppervlakje, stelt een zeer kleine hoeveelheid technische arbeid voor, waarvoor geldt:

$$dW = V \cdot dp \quad [1]$$

Voor het volume, hetgeen een functie van de druk is, kan geschreven worden, via

$$p \cdot V^n = c$$

$$V^n = \frac{c}{p}$$

Links en rechts de n-de machts wortel trekken geeft:

$$V = \left( \frac{c}{p} \right)^{\frac{1}{n}} = c^{\frac{1}{n}} \cdot p^{-\frac{1}{n}} \quad [2]$$

Vergelijking [2] invullen in [1] geeft

$$dW = c^{\frac{1}{n}} \cdot p^{-\frac{1}{n}} \cdot dp$$

Links en rechts integreren geeft nu

$$W = \int_{p_1}^{p_2} c^{\frac{1}{n}} \cdot p^{-\frac{1}{n}} \cdot dp$$

$$W = c^{\frac{1}{n}} \cdot \int_{p_1}^{p_2} p^{-\frac{1}{n}} \cdot dp$$

Hierbij maken we gebruik van de standaard integraal  $\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$

$$W = \left[ c^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{n} + 1} \cdot p^{-\frac{1}{n} + 1} \right]_{p_1}^{p_2}$$

Voor de constante kan nu ingevuld worden  $p \cdot V^n = c$ , waarna

$$W = \left[ \left( p \cdot V^n \right)^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot p^{\frac{n-1}{n}} \right]_{p_1}^{p_2}$$

$$W = \frac{n}{n-1} \cdot \{ p_2 \cdot V_2 - p_1 \cdot V_1 \} \quad [3]$$

Allereerst moet nu het volume, na het bereiken van de druk  $p_2$  berekend worden.

Hiervoor geldt:

$$p \cdot V^n = c, \text{ dus, ingevuld } 0,95 \cdot 0,05^{1,38} = 5 \cdot V_2^{1,38}$$

$$\text{Hieruit volgt: } V_2^{1,38} = \frac{0,95 \cdot 0,05^{1,38}}{5}, \text{ zodat } V_2 = \left\{ \frac{0,95 \cdot 0,05^{1,38}}{5} \right\}^{\frac{1}{1,38}} = 0,015008 \text{ m}^3$$

Thans kan vergelijking [3] worden ingevuld:

$$W = \frac{n}{n-1} \cdot \{p_2 \cdot V_2 - p_1 \cdot V_1\}.$$

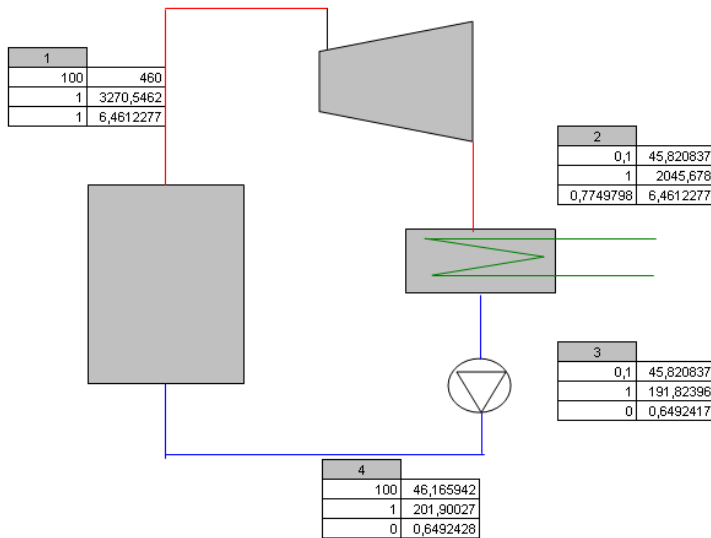
$$W = \frac{1,38}{1,38-1} \cdot \{5 \cdot 10^5 \cdot 0,015008 - 0,95 \cdot 10^5 \cdot 0,05\} = 10000 \text{ Joule} \quad [= Nm]$$

Voor het vermogen wordt gevonden:  $P = W \cdot n = 10^4 \cdot 5 = 50000 \text{ W} = 50 \text{ kW}$

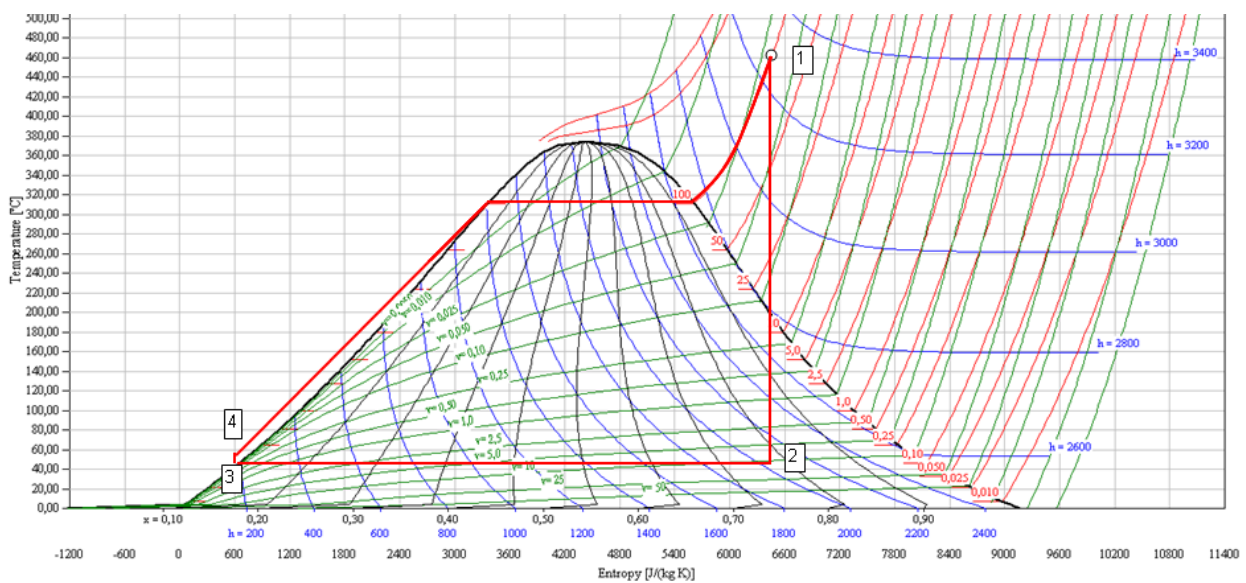


### Vraag 3:

p	t
m	h
x	s



Het proces, met daarin alle relevante gegevens



Weergave van het proces in het T – s – diagram

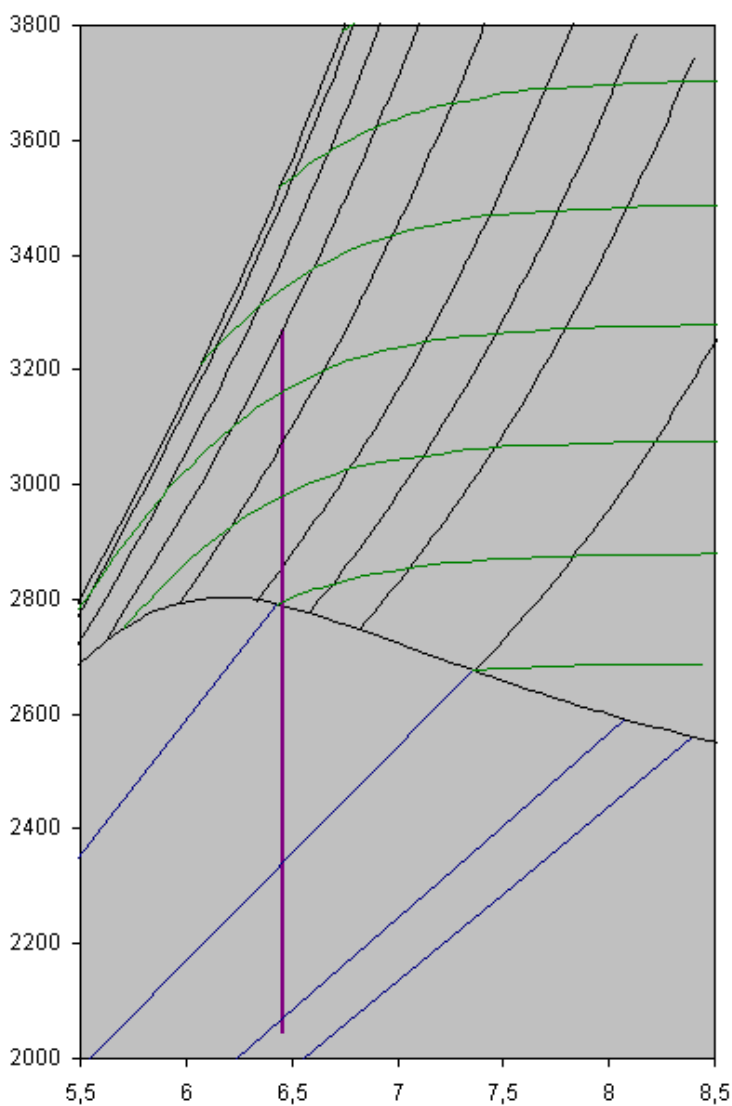
Weergave van alle belangrijke waarden in tabelvorm:

Punt	p	t	h	s	x
1	100	460	3270	6,46122	1
2	0,1	45,82	2045	6,46122	0,775
3	0,1	45,82	192	0,6492417	0
4	100	46,17	202	0,6492428	0

### Opmerking:

De waarde van de entropie van de afgewerkte stoom is onveranderd ten opzichte van de entropiewaarde van de verse stoom. Dit vanwege de isentrope warmteval. In het andere geval

kan deze waarde eenvoudig worden afgelezen in het  $h - s$  - diagram of worden berekend met hulp van de hefboomregel en gegevens ontleend aan de stoomtabel.



*Isentrope warmteval, weergegeven in het  $h - s$ - diagram*

De specifieke arbeid van de turbine bedraagt

$$W_{turbine} = h_1 - h_2$$

$$W_{turbine} = 3270 - 2045 = 1225 \text{ kJ / kg}$$

De specifieke toegevoerde warmte aan de kringloop bedraagt

$$Q_{toe} = h_1 - h_4$$

$$Q_{toe} = 3270 - 202 = 3068 \text{ kJ / kg}$$

Het thermisch rendement van de installatie

$$\eta_{thermisch} = \frac{W_{turbine}}{Q_{toe} + W_{pomp}} = \frac{W_{turbine}}{Q_{toe} + V \cdot \Delta p}$$

$$\eta_{thermisch} = \frac{1225}{3068 + 0,00102 \cdot (100 - 0,1) \cdot 100} = \frac{1225}{3068 + 10,2} = 0,39795 \quad \text{of} \quad 39,795\%$$

De gemiddelde temperatuur van warmtetoevoer wordt gevonden uit

$$\bar{T}_{toe} = \frac{\Delta h}{\Delta s} = \frac{h_1 - h_3}{s_1 - s_3} = \frac{3270 - 192}{6,46122 - 0,6492417} = 529,59 \text{ K}$$

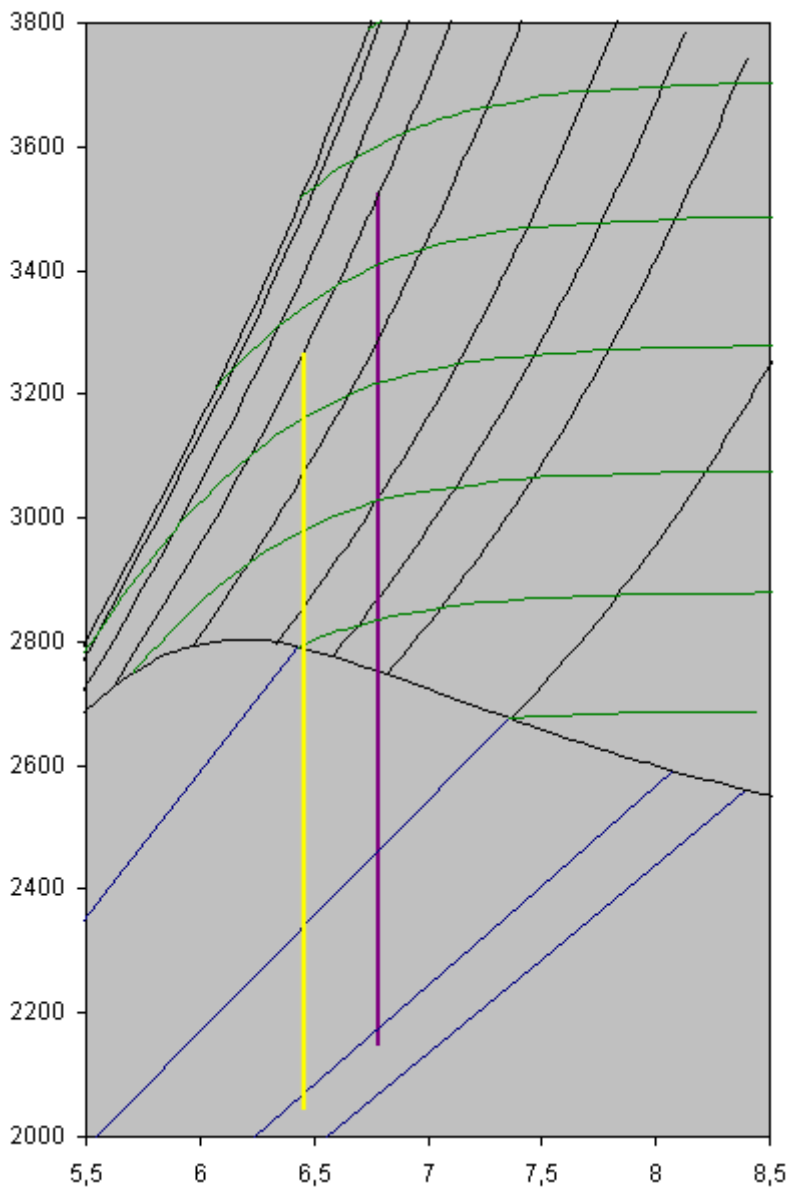
De gemiddelde temperatuur van warmteafvoer bedraagt 318,82 K.

Het berekende rendement volgens de formule van Carnot, levert nu

$$\eta_{Carnot} = \frac{\bar{T}_{toe} - \bar{T}_{af}}{\bar{T}_{toe}} = \frac{529,59 - 318,82}{529,59} = 0,39798 \quad \text{of} \quad 39,798\%$$

Wanneer de stoomtemperatuur met 100 K wordt verhoogd, tot 560 °C, dan zal dit uiteraard consequenties hebben voor de levensduur van het materiaal van de ketel en ook van het hoge temperatuur gedeelte van de stoomturbine. Deze onderdelen hebben te maken met het kruipverschijnsel.

Voor wat betreft het lage druk gedeelte van de turbine valt op te merken dat het watergehalte aanmerkelijk minder zal zijn. Erosieverschijnselen nemen hierdoor af. Ook is duidelijk te zien op afbeelding 5 dat de grootte van de warmteval is toegenomen. Ook uit de berekeningswijze van het rendement van Carnot zal duidelijk zijn dat de gemiddelde temperatuur van warmtetoevoer zal zijn toegenomen. Hierdoor is het thermisch rendement gestegen.



*Weergave expansieproces, maar nu met verhoogde temperatuur.*

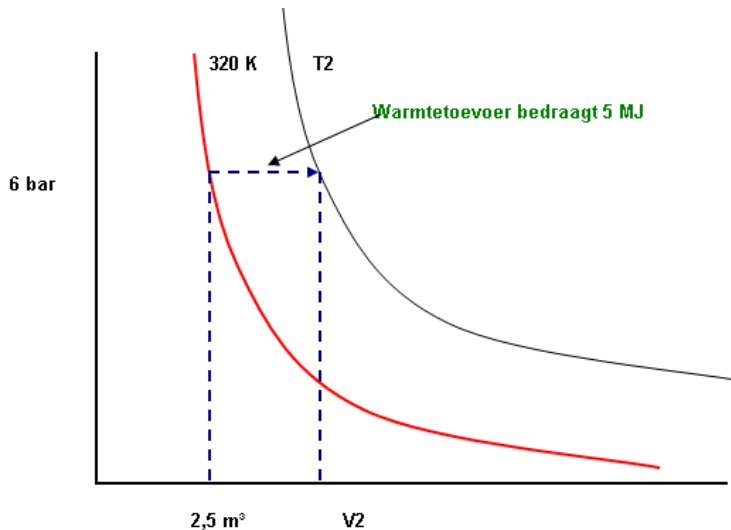
#### Vraag 4:

De formule, met welke het gevraagde kan worden berekend, luidt:

$$S_2 - S_1 = m \cdot c_p \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \quad (\text{A})$$

In deze vergelijking zijn echter zowel de waarde van de massa,  $m$  als de waarde van de eindtemperatuur,  $T_2$ , nog onbekend.

Wanneer nu het proces in het  $p - V$  - diagram wordt bestudeerd dan zien we het volgende.



Voor warmtetoevoer onder constante druk geldt de formule

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \frac{k}{k-1} \cdot p \cdot (V_2 - V_1)$$

Met hulp van deze formule berekenen we nu het volume na warmtetoevoer.

Er geldt, na enige algebraïsche herschikking:

$$V_2 = V_1 + \frac{(k-1) \cdot Q_{1 \rightarrow 2}}{p}$$

$$\text{Invullen levert } V_2 = 2,5 + \frac{(1,4-1) \cdot 5 \cdot 10^6}{6 \cdot 10^5} = 4,881 \text{ m}^3$$

Met behulp van de formule van Boyle – Gay – Lussac kan nu de eindtemperatuur worden berekend.

Hiervoor geldt:

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \text{ en met een isobare toestandsverandering, geldt } \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

Na enige algebraïsche herschikking vinden we dan  $T_2 = T_1 \cdot \frac{V_2}{V_1}$

$$\text{Invullen geeft } T_2 = 320 \cdot \frac{4,881}{2,5} = 625 \text{ K}$$

Thans is ook de massa nog een onbekende waarde, maar uit de gelijkheid

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \frac{k}{k-1} \cdot p \cdot (V_2 - V_1) = m \cdot c_p \cdot (T_2 - T_1)$$

volgt

$$m \cdot c_p = \frac{Q_{1 \rightarrow 2}}{(T_2 - T_1)}$$

Dit resultaat nu invullen in vergelijking (A) levert het gevraagde antwoord.

$$S_2 - S_1 = m \cdot c_p \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

$$S_2 - S_1 = \frac{Q_{1 \rightarrow 2}}{(T_2 - T_1)} \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

Invullen tenslotte levert

$$S_2 - S_1 = \frac{Q_{1 \rightarrow 2}}{(T_2 - T_1)} \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{5 \cdot 10^3}{(625 - 320)} \cdot \ln\left(\frac{625}{320}\right) = 10,9742 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$