

**Beschikbare tijd:** 100 minuten

Instructies voor het invullen van het antwoordblad.

1. Dit open boek tentamen bestaat uit **10** opgaven.
2. U mag tijdens het tentamen gebruik maken van:
  - Een tabellenboek, zonder aantekeningen;

Toegestane boeken:

- lessen Mechanica – REWIC HWTK
- boek Sterkteleer van S. Binnendijk
  
- Rekenmachine

3. Het aantal te behalen punten.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

$$cijfer = \frac{\text{aantal behaalde punten}}{10}$$

**Veel succes!**



**Opgave 1**

Een steun, veelal toegepast in de bouw, is uitgevoerd zoals is aangegeven op onderstaande afbeelding. De bouwsteun wordt belast met een kracht  $F = 30.360 \text{ N}$ .



De uitwendige diameter bedraagt 47 mm en de inwendige diameter meet 37 mm.

Bereken de optredende spanning, uitgedrukt in  $\text{N/mm}^2$

**Opgave 2**

Bij een spoorbaan is bij een temperatuur van  $10^\circ\text{C}$  de speling tussen de spoorstaven 2 mm. De lengte van een spoorstaaf bedraagt 18 meter.

De lineaire uitzettingscoëfficiënt van staal bedraagt  $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ .

Voor de elasticiteitsmodulus van het staal wordt  $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$

- a. Bereken de temperatuur waarbij de spoorstaven juist tegen elkaar aan liggen.

Tijdens een hittegolf wordt de temperatuur van de spoorstaven  $40^\circ\text{C}$ . De drukspanning in de staven mag maximaal  $70 \text{ N/mm}^2$  zijn.

- b. Bereken de drukspanning in de spoorstaven en bepaal of deze spanning toelaatbaar is.

### Opgave 3

De schalmen van een ketting van een hijsinstallatie zijn gemaakt van staal. Een dergelijke schalm is weergegeven op onderstaande afbeelding. De doorsnede mag volmaakt rond worden verondersteld.



De diameter van het materiaal bedraagt 12 mm. De toelaatbare trekspanning van het staal waar de ketting van gemaakt is bedraagt  $210 \text{ N/mm}^2$ .

Hoeveel ton kan met de hijsinstallatie gehesen worden?

### Opgave 4

Een ronde as geeft een draaimoment van  $7,5 \text{ Nm}$  door.

Bereken de (maximaal) optredende wringspanning in de as, uitgedrukt in  $\text{N/mm}^2$ , indien gegeven is dat de diameter van deze as  $50 \text{ mm}$  bedraagt.

### Opgave 5

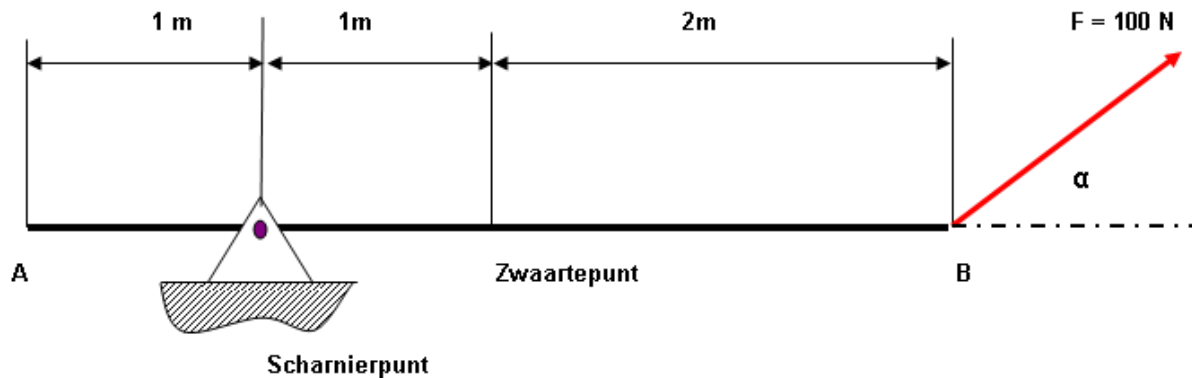
Een vliegwiel met een traagheidsstraal van  $20 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$  draait met  $1000$  omwentelingen per minuut. Het vliegwiel heeft een diameter van  $600 \text{ mm}$ .

Bereken van dit vliegwiel achtereenvolgens:

- De omtreksnelheid
- De rotatie energie of ook wel de kinetische energie genoemd.

### Opgave 6

Een hefboom AB, heeft een lengte van  $4 \text{ meter}$ . De hefboom wordt belast als is weergegeven op onderstaande afbeelding. Op het (rechter) eind van de balk werkt een kracht  $F = 100 \text{ N}$  onder de aangegeven hoek  $\alpha = 30^\circ$ .



Het gewicht van de balk bedraagt 50 N en voor berekeningen wordt aangenomen dat de kracht, veroorzaakt door het gewicht van de balk, aangrijpt op het zwaartepunt ervan. In het steunpunt S, hetgeen bestaat uit een scharnier, kan de balk wrijvingsloos bewegen.

Bereken

- De grootte van de kracht, welke in verticale zin, dus loodrecht op de balk AB, ter plaatse A moet werken, opdat de balk juist in evenwicht blijft, er dus juist geen draaiing optreedt.
- De grootte van de verticale reactiekracht, werkzaam in het scharnierpunt
- De totale reactiekracht in het scharnierpunt.

### Opgave 7

Op een helling met een hellingshoek van  $30^\circ$  ligt een blok met een massa van 20 kg.

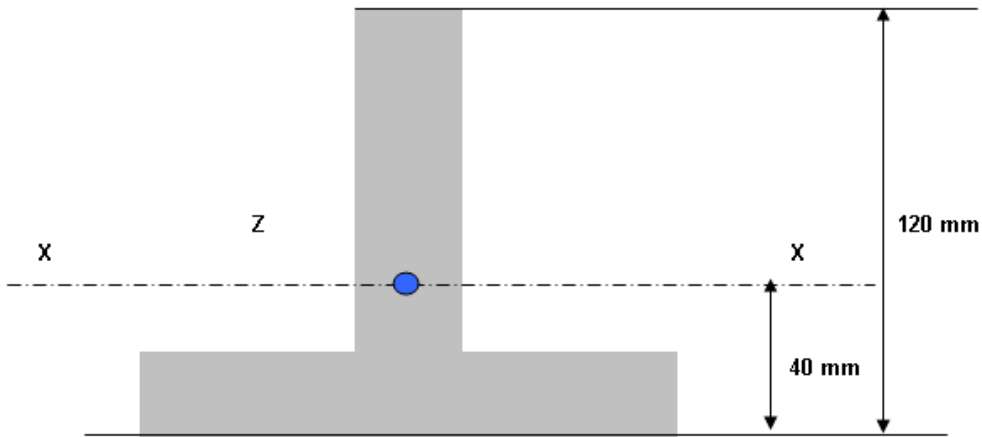
- Bereken wanneer het blok op het punt staat naar beneden te glijden de wrijvingscoëfficiënt tussen het blok en de helling.

Op het blok gaat nu een kracht evenwijdig aan de helling omhoog werken.

- Bereken de energie die nodig is om het blok 4 meter langs de helling omhoog te slepen.

### Opgave 8

Een stalen balk heeft een doorsnede als weergegeven op onderstaande afbeelding. De maten van de balk zijn aangegeven in de figuur.



Het maximaal optredende buigend moment is voor de balk  $0,32 \text{ kNm}$ .

Het lineair traagheidsmoment van de balk bedraagt  $1,28 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$ .

- Bereken de maximaal optredende spanning in deze balk in  $\text{N/mm}^2$
- Geef aan hoe de buigspanning in de balk verloopt.

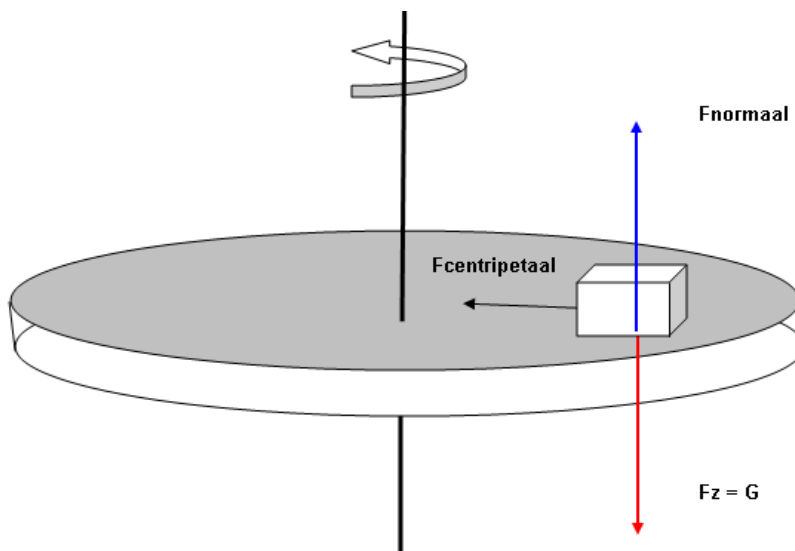
### Opgave 9

Een draaischijf heeft een hoeksnelheid van  $\omega = 2 \text{ rad/s}$ .

Op de schijf ligt een blokje van 1 kg op een afstand van 1 meter van het middelpunt van de schijf.

De wrijvingscoëfficiënt tussen het blokje en de schijf bedraagt  $f = 0,5$ .

Beschouw nu ook onderstaande afbeelding voor de hierboven bedoelde situatie.



- Bereken de centripetale kracht welke op het blokje werkt
- Blijft het blokje op zijn plaats liggen?

### Opgave 10

Een ronde, stalen, staaf met een diameter van 50 mm en een lengte van 2 meter is aan beide uiteinden scharnierend bevestigd en wordt op knik belast. De elasticiteitsmodulus van het materiaal bedraagt  $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ . Vanwege de aard van de toepassing wordt gewerkt met een veiligheidscoëfficiënt van  $\nu = 10$ .

Bereken de toelaatbare kracht in deze staaf, uitgedrukt in kN. Maak daarbij gebruik van de juiste knikformule van Euler.

## Uitwerkingen:

### Vraag 1:

Hierbij wordt gebruik gemaakt van de vergelijking **spanning = kracht per eenheid van oppervlakte**.

$$\sigma_{druk} = \frac{F}{A} = \frac{F}{\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (d_u^2 - d_i^2)} = \frac{30360 \cdot 4}{\pi \cdot (47^2 - 37^2)} = 46 \frac{N}{mm^2}$$

### Vraag 2:

a.

Bij de berekening van de lengtetoeename van de staaf wordt gebruik gemaakt van de volgende formule:

$$\Delta l = l_{oorspronkelijk} \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

Bedenk dat hierbij de oorspronkelijke lengte moet worden ingevuld in mm.

De oorspronkelijke formule wordt met hulp van algebra eerst omgewerkt

$$\Delta l = l_{oorspronkelijk} \cdot \alpha \cdot \Delta T \text{ levert } \Delta T = \frac{\Delta l}{l_{oorspronkelijk} \cdot \alpha} = \frac{2 \cdot 10^6}{18 \cdot 10^3 \cdot 12} = 9,26 \text{ K}$$

De temperatuur stijgt met 9,26 °C tot 19,26 °C.

b.

Wanneer de temperatuur tot 40 °C stijgt, bedraagt de verlenging van de staaf

$$\Delta l = l_{oorspronkelijk} \cdot \alpha \cdot \Delta T = 18000 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot (40 - 10) = 6,48 \text{ mm}$$

De verlenging kan maar 2 mm bedragen. Door temperatuurverhoging wordt de staaf dus 4,48 mm in zijn uitzetting belemmerd.

Hierbij wordt gebruik gemaakt van de wet van Hooke.

Deze zegt:

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{A \cdot E}$$

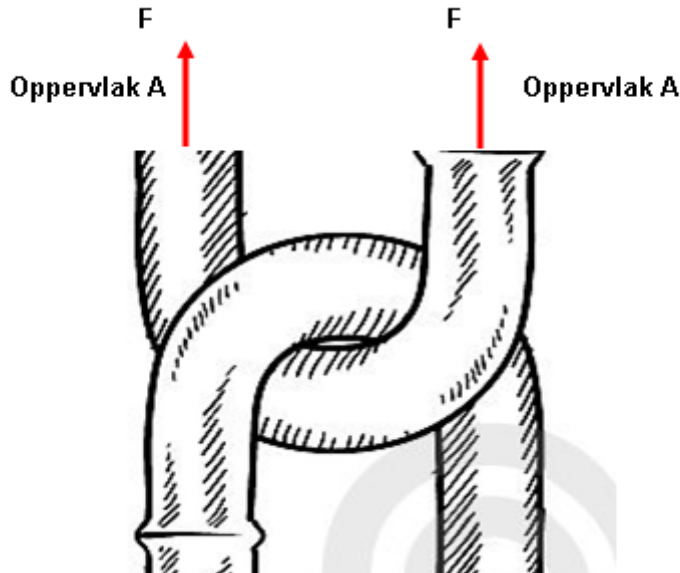
Na enige algebraïsche herschikking vinden we

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{\Delta l}{l} \cdot E = \frac{4,48}{18000} \cdot 2,1 \cdot 10^5 = 52,26 \text{ N/mm}^2$$

Aangezien  $52,26 < 70$ , is deze situatie dus aanvaardbaar.

**Vraag 3:**

Bedenk dat de gegeven doorsnede twee maal in rekening moet worden gebracht. Dat wordt nog eens extra duidelijk gemaakt. De ketting wordt immers op deze wijze belast!



Gebruik wordt gemaakt van de wet van Hooke. Deze zegt:

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Na algebraïsche herschikking wordt gevonden

$$F = \sigma \cdot A = 210 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 12^2 = 47500 \text{ N} = 47,5 \text{ kN} = 4,75 \text{ ton}$$

**Vraag 4:**

Gebruik wordt gemaakt van de formule

$$\sigma_{wring} = \frac{M_{wring}}{W_{wringing}} \text{ en waarbij } W_{wringing} = \frac{I_{polair}}{e}. \text{ Hierin is } e \text{ de uiterste vezelafstand, dus } e = \frac{D}{2}.$$

Verder is bekend dat het polaire traagheidsmoment gelijk is aan  $I_{polair} = \frac{\pi \cdot D^4}{32}$ , zodat

$$W_{wringing} = \frac{\pi \cdot D^4}{32} \cdot \frac{2}{D} = \frac{\pi \cdot D^3}{16}$$

Samenvoegen geeft



$$\sigma_{wring} = \frac{M_{wring}}{W_{wringing}} = \frac{M_{wring}}{\frac{\pi \cdot D^3}{16}} = \frac{16 \cdot M_{wring}}{\pi \cdot D^3} = \frac{16 \cdot 7,5 \cdot 10^3}{\pi \cdot 50^3} = 0,3 \frac{N}{mm^2}$$

### Vraag 5:

a.

De omtreksnelheid volgt uit  $V = \omega \cdot R = 2 \cdot \pi \cdot n \cdot R = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1000}{60} \cdot \frac{0,6}{2} = 31,42 \text{ m/s}$

b.

Voor de rotatie - energie wordt wel geschreven

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2 \text{ en met } \omega = \frac{V}{R} \text{ volgt } E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \left(\frac{V}{R}\right)^2$$

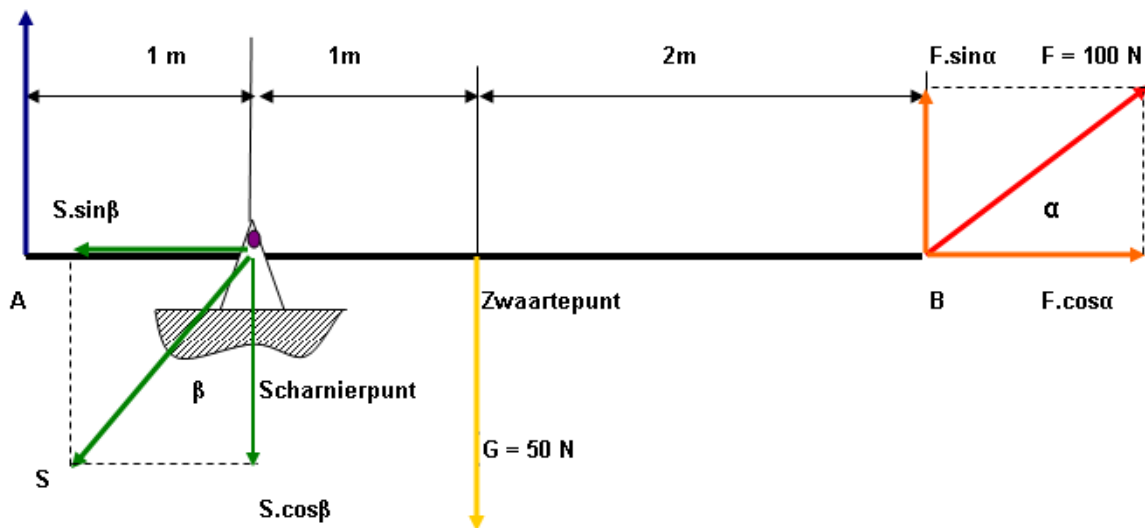
Invullen van deze samengestelde formule tenslotte levert

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \left(\frac{V}{R}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot \left(\frac{31,42}{0,3}\right)^2 = 109691 \text{ Nm} \approx 110 \text{ kNm}$$

### Vraag 6:

Bij de oplossing van dit vraagstuk maken we gebruik van de drie evenwichtsvergelijkingen van Newton.

Allereerst brengen we de diverse krachten in beeld. Zie hiertoe onderstaande afbeelding.



De som van de krachten in horizontale zin is gelijk aan nul (0).

$$\sum F_{\text{horizontaal}} = 0; \quad F \cdot \cos \alpha - S \cdot \sin \beta = 0 \quad \text{A}$$

De som van de krachten in verticale zin is gelijk aan nul (0).

$$\sum F_{\text{verticaal}} = 0; \quad R_A - S \cdot \cos \beta - G + F \cdot \sin \alpha = 0 \quad \text{B}$$

De som van de momenten, bijvoorbeeld ten opzichte van S is gelijk aan nul (0).

$$\sum M_{t.o.v.S} = 0; \quad -R_A \cdot 1 - G \cdot 1 + F \cdot \sin \alpha \cdot 3 = 0 \quad \text{C}$$

Hierboven staan nu een drietal vergelijkingen waarbinnen zich een drietal onbekenden bevinden, namelijk de gevraagde kracht ter plaatse, A, de steunpuntreactiekracht in het scharnierpunt en de hoek waaronder deze kracht werkzaam is. Wanneer zulks de ingrediënten zijn, is het probleem statisch bepaald en daarmee oplosbaar.

### Begonnen wordt met vergelijking (C)

$$-R_A \cdot 1 - G \cdot 1 + F \cdot \sin \alpha \cdot 3 = 0$$

Na enige algebraïsche herschikking vinden we

$$R_A \cdot 1 = -G \cdot 1 + F \cdot \sin \alpha \cdot 3$$

$$R_A = -G + F \cdot \sin \alpha \cdot 3 = -50 + 3 \cdot 100 \cdot \sin 30^\circ = -50 + 150 = 100 \text{ N}$$

### De volgende stap is het oplossen van vergelijking (B)

$$R_A - S \cdot \cos \beta - G + F \cdot \sin \alpha = 0$$

Na enige algebraïsche herschikking vinden we

$$S \cdot \cos \beta = F \cdot \sin \alpha + R_A - G$$

Invullen levert

$$S \cdot \cos \beta = 100 \cdot \sin 30 + 100 - 50 = 100 \text{ N}$$

### Tenslotte gebruiken we nu ook vergelijking (A)

$$F \cdot \cos \alpha - S \cdot \sin \beta = 0$$

Na enige algebraïsche herschikking vinden we

$$F \cdot \cos \alpha = S \cdot \sin \beta$$

Invullen levert

$$S \cdot \sin \beta = F \cdot \cos \alpha = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = 50 \cdot \sqrt{3} \text{ N}$$

Met behulp van de stelling van Pythagoras kan nu de waarde van de reactiekracht, geleverd door het scharnier, worden berekend.

Er geldt:

$$S = \sqrt{(S \cdot \cos \beta)^2 + (S \cdot \sin \beta)^2}$$

Hieruit volgt dus

$$S = \sqrt{(100)^2 + (50 \cdot \sqrt{3})^2} = \sqrt{(100)^2 + (50 \cdot \sqrt{3})^2} = 132,3 \text{ N}$$

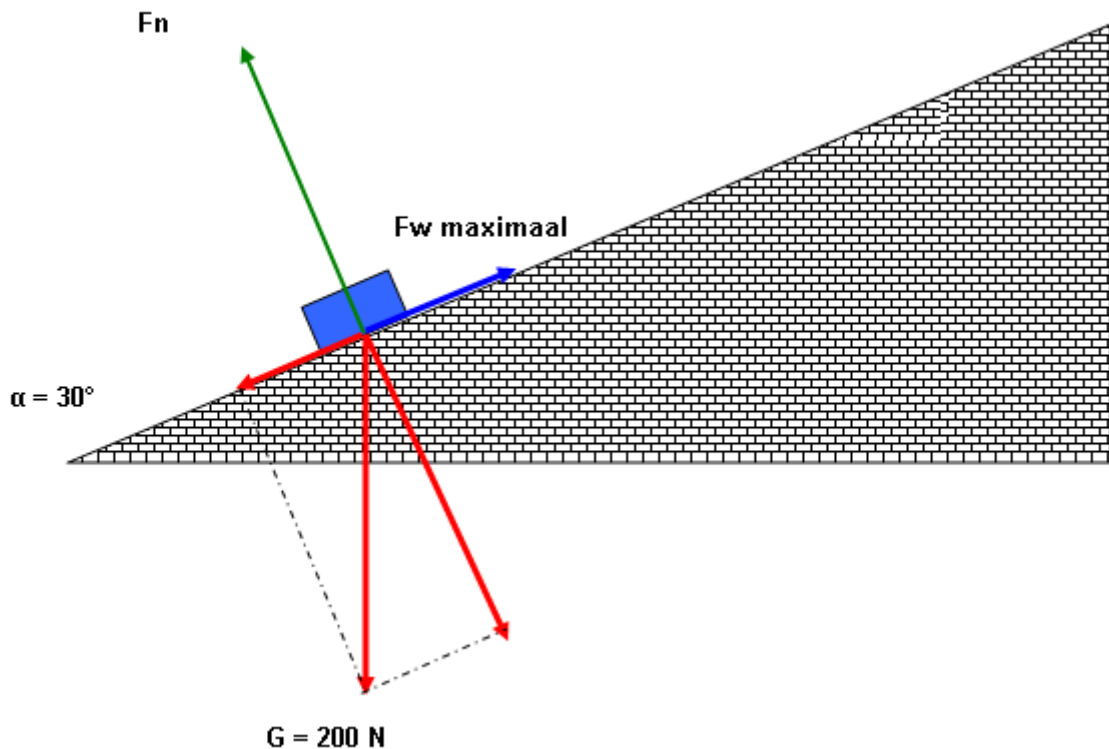
Tenslotte vinden we voor de hoek  $\beta$ :

$$\beta = \text{inv tan } \beta = \text{inv tan} \left( \frac{S \cdot \sin \beta}{S \cdot \cos \beta} \right) = \text{inv tan} \left( \frac{50 \cdot \sqrt{3}}{100} \right) = 40,9^\circ$$

### Vraag 7:

a.

Beschouw onderstaande afbeelding. Hierop zijn alle krachten getekend welke binnen deze situatie werkzaam zijn.



$$\sum F_{\text{evenwijdig}} = 0 \quad G \cdot \sin \alpha - F_{\text{wrijving, maximaal}} = 0 \text{ en } F_{\text{wrijving, maximaal}} = f \cdot F_n$$

$$\sum F_{\text{loodrecht}} = 0 \quad G \cdot \cos \alpha - F_n = 0$$

Na enige algebraïsche herschikking kan gevonden worden

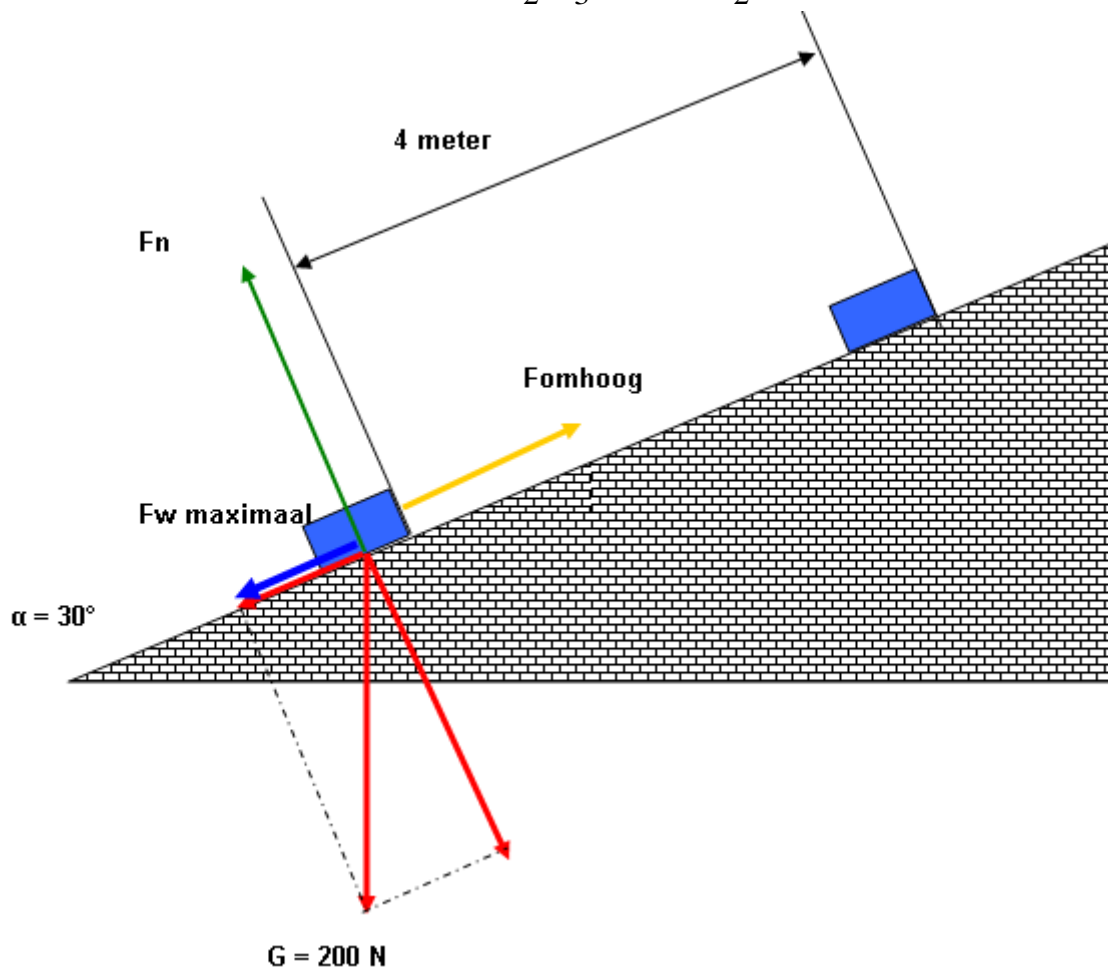
$$G \cdot \sin \alpha = F_{\text{wrijving, maximaal}} = f \cdot G \cdot \cos \alpha$$

$$f = \tan \alpha = \tan 30 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}$$

b.

De kracht welke nodig is om het blok omhoog te bewegen bedraagt

$$F_{\text{beweging omhoog}} = G \cdot \sin \alpha + F_{\text{wrijving maximaal}} = 200 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 200 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = 100 + 100 = 200 \text{ N}$$



Deze kracht legt nu een weg af van 4 meter. Er geldt:

$$W = F \cdot S = 200 \cdot 4 = 800 \text{ Nm}$$

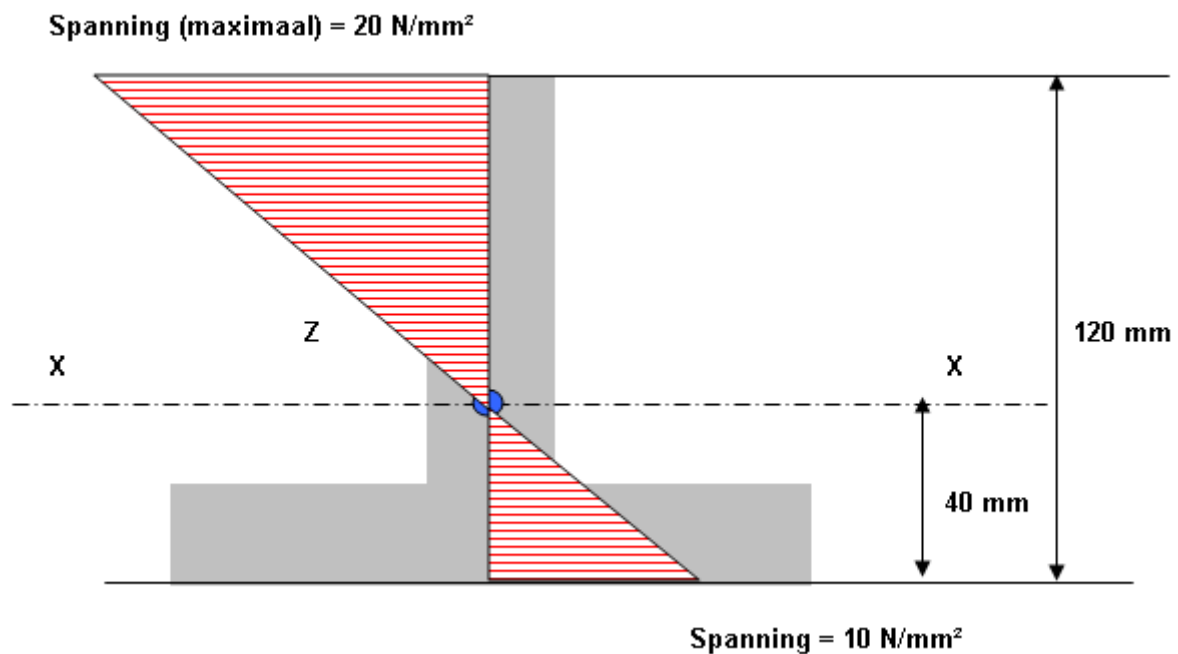
### Vraag 8:

a.

Voor de weerstand tegen buiging geldt:

$$W_{\text{buiging}} = \frac{I_{x-x}}{\text{uiterste vezel}} = \frac{1,28 \cdot 10^6}{80} = 16000 \text{ mm}^3$$

$$\sigma_{\text{buiging}} = \frac{M_{\text{buiging}}}{W_{\text{buiging}}} = \frac{320000}{16000} = 20 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$



**Vraag 9:**

a.

Voor de centripetale kracht geldt de volgende formule:

$$F_{\text{centripetaal}} = m \cdot \omega^2 \cdot R = 1 \cdot 2^2 \cdot 1 = 4 \text{ N}$$

b.

Het gewicht van het blokje bedraagt

$$G = m \cdot 1 \cdot 10 = 10 \text{ N}.$$

Voor de optredende normaalkracht, uitgeoefend door de oppervlakte van de schijf op het blokje geldt

$$F_{\text{normaal}} = G.$$

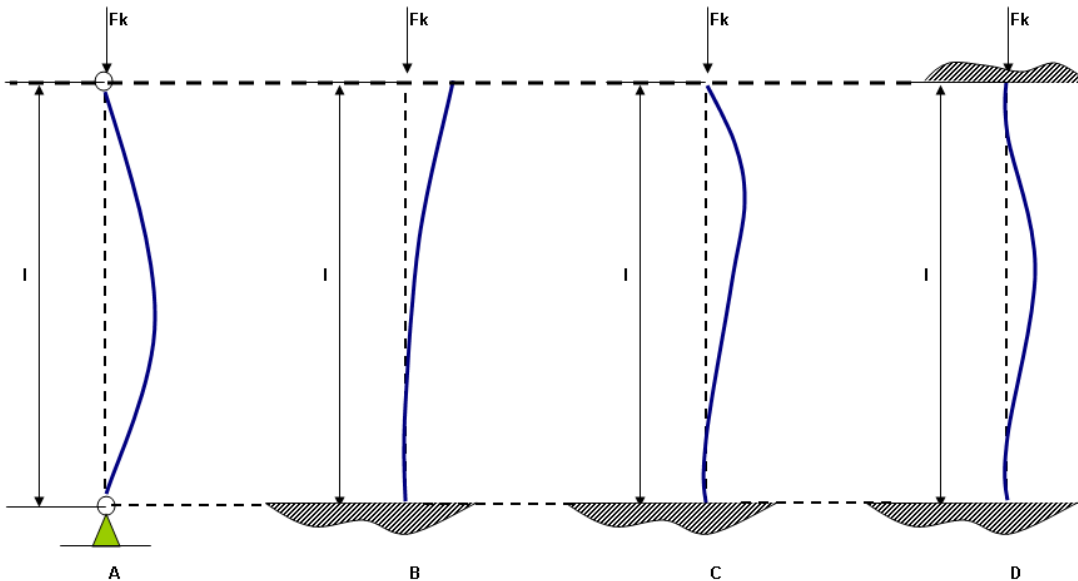
Met een wrijvingscoëfficiënt van  $f = 0,5$  zal de maximale wrijvingskracht dan

$$F_{\text{wrijving maximaal}} = f \cdot N = 0,5 \cdot 10 = 5 \text{ N} \text{ bedragen.}$$

Het blokje blijft dus liggen want de optredende centripetale kracht (4) is kleiner dan de maximaal mogelijke wrijvingskracht, (5).

### Vraag 10:

Bij de knik – theorie kunnen vier knikgevallen worden onderscheiden. Deze zijn schematisch weergegeven op onderstaande afbeelding.



Voor deze knikgevallen gelden de volgende formules.

$$\text{Knikgeval A: } F_{knik} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{l^2}$$

$$\text{Knikgeval B: } F_{knik} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{4 \cdot l^2}$$

$$\text{Knikgeval C: } F_{knik} = \frac{2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{l^2}$$

$$\text{Knikgeval D: } F_{knik} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{l^2}$$

In dit geval hebben we te maken met knikgeval A. Hiervoor geldt:

$$F_{knik} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{l^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi}{32} \cdot 50^4}{2000^2} = 203478 \text{ N} \approx 203,5 \text{ kN} \approx 20 \text{ ton}$$

Omdat echter gewerkt wordt met een veiligheidsfactor,  $v = 10$ , zullen de hierboven berekende grootheden dus met een factor 10 moeten worden verkleind.

Zo geldt:

**Maximaal toelaatbare last = 2 ton!**